ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Том XXV, вып. 3 Сентябрь 1976 г.

УДК 535.36 : 523.035

Н. Н. Роговцов, А. М. Самсон

ОБ ОТЫСКАНИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ ВНУТРИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО РАССЕИВАЮЩЕГО СЛОЯ ПО ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ, ВЫХОДЯЩЕГО ИЗ НЕГО

Исследование светового режима внутри рассеивающей среды в некоторых случаях сопряжено со значительными трудностями. Это связано со сложностью или вообще с невозможностью проведения измерений непосредственно внутри целого ряда рассеивающих сред, например таких, как бумага, листья растений, факелы, фотосферы звезд, некоторые планетные атмосферы. Одной из наиболее важных характеристик, по которой можно судить в этих ситуациях о рассеивающем объекте, является излучение, выходящее из него. Поэтому представляет интерес решение задачи о нахождении поля излучения внутри рассеивающей среды по интенсивностям излучения, выходящего из нее.

В данной статье предложен метод, который позволяет найти функцию источников, если известны интенсивности излучения, выходящего из однородного плоскопараллельного рассеивающего слоя с заданными оптическими характеристиками и источниками возбуждения. Приведены соответствующие формулы. Показано, что изложенный подход естественным образом приводит к формулировке новых линейных интегральных уравнений для интенсивностей излучения на границах слоя, причем простая итерационная схема их решения (без применения способов ускорения сходимости) весьма эффективна при любых значениях вероятности выживания кванта и оптической толщины слоя. Если считать известными интенсивности излучения, выходящего из среды, то эти же уравнения могут служить для определения первичной функции источников. Здесь вопрос о нахождении этой функции рассматриваться не будет. Эта задача для случая полубесконечной плоскопараллельной среды была проанализирована ранее в [1].

В данной работе метод будет проиллюстрирован только на самом простом случае, когда рассеяние изотропно и при акте рассеяния не происходит изменения частоты. Однако он может использоваться при более сложных предположениях относительно свойств элементарного объема. В частности, можно учесть перераспределение излучения по частотам и анизотропность рассеяния. Отметим также, что изложенные нами результаты достаточно легко обобщаются и тогда, когда необходимо принять во внимание наличие подстилающих поверхностей.

Исходя из уравнения переноса излучения для однородного плоскопараллельного слоя в случае изотропного монохроматического рассеяния, нетрудно получить следующее интегральное соотношение [2]:

$$\bar{\eta}(p)\,\bar{S}(p) = \bar{f}(p) + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{\mu I(0, \mu, \lambda)}{\mu p - 1}\,d\mu -$$

$$- \frac{\lambda}{2} e^{-p\tau_0} \int\limits_0^1 \frac{\mu I(\tau_0, -\mu, \lambda)}{\mu p + 1} d\mu, \tag{1}$$

где

$$\bar{S}(p) = \int\limits_0^{\tau_0} e^{-p\tau} S(\tau)\, d\tau, \quad \bar{f}(p) = \int\limits_0^{\tau_0} e^{-p\tau} f(\tau)\, d\tau,$$

$$\bar{\eta}(p) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\mu}{\mu p - 1}; \tag{2}$$

$S(\tau)$ — функция источников на оптической глубине τ; $f(\tau)$ — функция, задающая первичные источники излучения; τ_0 — оптическая толщина слоя; λ — вероятность выживания кванта; $I(0, |\mu|, \lambda)$ и $I(\tau_0, -|\mu|, \lambda)$ — соответственно интенсивности излучения, выходящего через границы $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ под углом $\theta = \arccos|\mu|$ к внешним нормалям границ слоя.

В работах [2, 3] соотношение (1) было использовано для определения пространственных моментов функции источников и связанных с ними величин по известным $I(0, |\mu|, \lambda)$, $I(\tau_0, -|\mu|, \lambda)$, а также было указано на полезность подобных соотношений при решении обратных задач теории переноса излучения. Нами дано естественное обобщение результатов [2,3], а именно показано, что из (1) можно получить формулу и для самой функции источников $S(\tau)$, если известны $I(0, |\mu|, \lambda)$, $I(\tau_0, -|\mu|, \lambda)$.

Чтобы доказать это, сделаем в (1), (2) замену $p = i\omega$, умножим (1) на $(1/2\pi\bar{\eta}(i\omega))e^{i\omega\tau^*}$ и проинтегрируем по ω от $-\infty$ до ∞ (интегрирование понимаем в смысле главного значения [4]). Теперь, предполагая, что $S(\tau)$ интегрируема на всей вещественной оси (после будет показано, что это не является существенным ограничением) и удовлетворяет условию Дини на интервале $(0, \tau_0)$, по формуле обращения преобразования Фурье [5] находим искомое выражение для функции источников

$$S(\tau^*) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau^*}}{\bar{\eta}(i\omega)} \left\{ \bar{f}(i\omega) + \frac{\lambda}{2} \int\limits_0^1 \frac{\mu I(0, \mu, \lambda)}{\mu i\omega - 1} d\mu - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda}{2} e^{-i\omega\tau_0} \int\limits_0^1 \frac{\mu I(\tau_0, -\mu, \lambda)}{\mu i\omega + 1} d\mu \right\} d\omega, \tag{3}$$

$$0 < \tau^* < \tau_0.$$

Отметим сразу, что при $\tau_0 < \infty$ соотношение (3) справедливо при любых $\lambda \leqslant 1$, поскольку $M_0 < \infty$ (M_0 — нулевой пространственный момент функции источников [2]).

Выражение (3) не очень удобно, так как оно представляет собой интеграл от осциллирующей функции. Преобразуем (3) с помощью контурного интегрирования к виду, более приемлемому для вычислений. Для этого нужно предварительно выяснить аналитические свойства $\bar{S}(iz)$, вообще говоря, на всей комплексной плоскости ($z = x + iy$). Это в свою очередь приводит к необходимости исследования соответствующих свойств функции $\bar{f}(iz)$, что в общем случае затруднительно. С целью преодоления этого неудобства рассмотрим сначала частный тип $f(\tau)=f_1(\tau, \tau_1, \lambda)=\frac{\lambda}{2}\times$ $\times E_1[|\tau-\tau_1|]$. Как известно (см., напр., [6]), при таких первичных источниках $S(\tau^*)$ будет тождественно равна резольвенте $\Gamma(\tau^*, \tau_1, \tau_0, \lambda)$ интегрального уравнения для функции источников. Из (2) непосредственно следует, что

$$\bar{f}_1(z, \tau_1, \lambda)=\frac{\lambda}{2}\left\{\int\limits_0^1 \frac{e^{-(\tau_1/\mu)}}{\mu i z-1}\,d\mu-e^{-iz\tau_1}\int\limits_{-1}^1 \frac{d\mu}{\mu i z-1}-\right.$$
$$\left.-e^{-iz\tau_0}\int\limits_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau_0-\tau_1}{\mu}}}{\mu i z+1}\,d\mu\right\}. \tag{4}$$

Подставляя (4) при $z=\omega$ в (3) и делая элементарные преобразования, находим для резольвенты следующее выражение:

$$\Gamma(\tau^*, \tau_1, \tau_0, \lambda)=\frac{\lambda}{4\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\right)\Gamma^*(i\omega)\,d\omega+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{i\omega\tau^*}\bar{\Gamma}(\omega)\,d\omega, \tag{5}$$

где

$$\Gamma^*(i\omega)=\frac{1}{\bar{\eta}(i\omega)}\left\{e^{i\omega\tau^*}\left(\int\limits_0^1 \frac{e^{-(\tau_1/\mu)}}{\mu i\omega-1}\,d\mu+\int\limits_0^1 \frac{\mu I_\gamma(0, \mu, \tau_1, \lambda)}{\mu i\omega-1}\,d\mu\right)+\right.$$
$$+e^{i\omega(\tau_0-\tau^*)}\left(\int\limits_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau_0-\tau_1}{\mu}}}{\mu i\omega-1}\,d\mu+\int\limits_0^1 \frac{\mu I_\gamma(\tau_0, -\mu, \tau_1, \lambda)}{\mu i\omega-1}\,d\mu\right)-$$
$$\left.-e^{i\omega|\tau_1-\tau^*|}\int\limits_{-1}^1 \frac{d\mu}{\mu i\omega-1}\right\}. \tag{6}$$

В (5), (6) функция $\bar{\Gamma}(\omega)$ — преобразование Фурье от $\Gamma(\tau^*, \tau_1, \tau_0, \lambda)$; $I_\gamma(0, |\mu|, \tau_1, \lambda)$ и $I_\gamma(\tau_0, -|\mu|, \tau_1, \lambda)$ — соответственно интенсивности излучения, выходящего через границы слоя при наличии внутри него источников $f(\tau, \tau_1, \lambda)=\frac{\lambda}{2}E_1[|\tau-\tau_1|]$. С помощью контурного интегрирования только в верхней полуплоскости из (5) можно получить формулы для резольвенты при $\lambda\leqslant 1$, не содержащие осциллирующих подынтегральных функций.

Предположим сначала, что рассеяние неконсервативно. В этом случае выражение (5) верно и при $\varepsilon=0$, поскольку $\Gamma^*(i\omega)$ и $\bar{\Gamma}(\omega)$ при $\lambda<1$ не имеют особенностей в нуле. Формула (6) указывает на то, что $\Gamma^*(iz)$ имеет в верхней полуплоскости только линию ветвления $(i, i\infty)$, возникающую из-за наличия в (6) интегралов типа Коши, и полюс первого порядка в точке $z=ik$ (k — корень характеристического уравнения [6]), появляющийся из-за того, что $\bar{\eta}(iz)$ имеет нуль в соответствующей точке (доказательство этого см., напр., в [7]). Принимая во внимание сказанное, с помощью контурного интегрирования из (5) при $\varepsilon=0$ получаем окончательное выржение для резольвенты при $\lambda<1$:

$$\Gamma(\tau^*, \tau_1, \tau_0, \lambda) = \frac{k(1-k^2)}{1-k^2-\lambda}\left\{\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{J(\mu, k, \tau^*, \tau_1, \tau_0, \lambda)}{\mu k+1}d\mu - \right.$$

$$\left. - e^{-k|\tau^*-\tau_1|}\right\} - \frac{\lambda^2}{4}\int_1^\infty b(y, \lambda)\int_0^1 \frac{J(\mu, y, \tau^*, \tau_1, \tau_0, \lambda)}{\mu y+1}d\mu dy + \tag{7}$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_1^\infty b(y, \lambda)\, e^{-y|\tau^*-\tau_1|}\, dy.$$

В (7) функции $J(|\mu|, m, \tau^*, \tau_1, \tau_0, \lambda)$ при $m = k, m = y$; $b(y, \lambda)$ задаются формулами

$$J(|\mu|, m, \tau^*, \tau_1, \tau_0, \lambda) = e^{-m\tau^*}\left(|\mu| I_\gamma(0, |\mu|, \tau_1, \lambda) + e^{-\frac{\tau_1}{|\mu|}}\right) +$$

$$+ e^{-m(\tau_0-\tau^*)}\left(|\mu| I_\gamma(\tau_0, -|\mu|, \tau_1, \lambda) + e^{-\frac{(\tau_0-\tau_1)}{|\mu|}}\right), \tag{8}$$

$$b(y, \lambda) = \frac{y}{\left(y - \frac{\lambda}{2}\ln\frac{1+y}{y-1}\right)^2 + \frac{\lambda^2\pi^2}{4}}.$$

При выводе (7) были также учтены формулы Сохоцкого—Племели [4]. Отметим, что (7) справедливо и при $\tau_0 = \infty$, поскольку, очевидно, $M_0 = \int_0^\infty \Gamma(\tau^*, \tau_1, \infty, \lambda)\, d\tau^* < \infty$.

Будем считать теперь, что рассеяние консервативно. Функция $\bar{\eta}(iz)$ при $\lambda = 1$ в окрестности нуля разлагается в ряд [2]

$$\bar{\eta}(iz) = \sum_{k=2}^\infty \bar{\eta}_k (iz)^k = \frac{z^2}{3}(1 + z^2\chi(z)), \tag{9}$$

где $\chi(z)$ — аналитическая функция при $z = 0$. При $\lambda = 1$ имеет место также следующее интегральное соотношение:

$$2 - \int_0^1 e^{-\frac{\tau_1}{\mu}} d\mu - \int_0^1 e^{-\frac{(\tau_0-\tau_1)}{\mu}} d\mu - \int_0^1 \mu I_\gamma(0, \mu, \tau_1, 1)\, d\mu -$$

$$- \int_0^1 \mu I_\gamma(\tau_0, -\mu, \tau_1, 1)\, d\mu = 0, \tag{10}$$

которое является непосредственным следствием первой из формул (9) работы [2] при $f(\tau) = \frac{1}{2}E_1[|\tau - \tau_1|]$ и $\lambda = 1$. Учитывая (9), (10), нетрудно показать, что $\Gamma^*(iz)$, определяемая через (6), имеет полюс первого порядка в нуле. Первые два интеграла в (5) можно выразить через интегралы по предельным контурам вдоль линии ветвления $(i, i\infty)$ функции $\Gamma^*(iz)$ и контурному интегралу по полуокружности, соединяющей точки

$z=\varepsilon$ и $z=-\varepsilon\,(\varepsilon<1)$ и лежащей в верхней полуплоскости. Переходя к пределу $\varepsilon\to 0$ в полученном указанным выше образом выражении, с учетом (9), (10) окончательно находим формулу для резольвенты при консервативном рассеянии

$$\Gamma(\tau^*, \tau_1, \tau_0, 1)=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^1(\mu+\tau^*)\left(e^{-\frac{\tau_1}{\mu}}+\mu I_\gamma(0, \mu, \tau_1, 1)\right)d\mu+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1(\mu+(\tau_0-\tau^*))\left(e^{-\frac{\tau_0-\tau_1}{\mu}}+\mu I_\gamma(\tau_0, -\mu, \tau_1, 1)\right)d\mu-$$

$$\left.-|\tau_1-\tau^*|\right]-\frac{1}{4}\int_1^\infty b(y, 1)\int_0^1\frac{J(\mu, y, \tau^*, \tau_1, \tau_0, 1)}{\mu y+1}\,d\mu dy+ \tag{11}$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^\infty b(y, 1)\,e^{-y|\tau^*-\tau_1|}\,dy.$$

При получении (11) было принято во внимание, что третий член в (5) при $\varepsilon\to 0$ обращается в нуль (это следствие аналитичности $\bar\Gamma(z)$ в точке $z=0$). Формулу (11) можно найти также и непосредственно из (7), раскрывая имеющуюся там неопределенность при $\lambda\to 1$ $(k\to 0)$ с помощью соотношения (10).

Исходя из (7), (11) и определения резольвенты, нетрудно показать, что функция источников $S(\tau^*)$ при любом первичном возбуждении, описываемом $f(\tau)$, выражается через интенсивности $I(0, |\mu|, \lambda)$, $I(\tau_0, -|\mu|, \lambda)$ излучения, выходящего из слоя, следующим образом:

$$S(\tau^*)|_{\lambda<1}=f(\tau^*)+\frac{k(1-k^2)}{k^2+\lambda-1}\left[\int_0^{\tau_0}f(\tau')\,e^{-k|\tau^*-\tau'|}\,d\tau'-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{\mu}{\mu k+1}\left(e^{-k\tau^*}I(0, \mu, \lambda)+e^{-k(\tau_0-\tau^*)}I(\tau_0, -\mu, \lambda)\right)d\mu\right]- \tag{12}$$

$$-\frac{\lambda^2}{4}\int_1^\infty b(y, \lambda)\int_0^1\frac{\mu}{\mu y+1}\left(e^{-y\tau^*}I(0, \mu, \lambda)+e^{-y(\tau_0-\tau^*)}I(\tau_0, -\mu, \lambda)\right)d\mu dy+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_1^\infty b(y, \lambda)\int_0^{\tau_0}e^{-y|\tau^*-\tau'|}f(\tau')\,d\tau' dy;$$

$$S(\tau^*)|_{\lambda=1}=f(\tau^*)+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^1\mu^2\left(I(0, \mu, 1)+I(\tau_0, -\mu, 1)\right)d\mu+\right.$$

$$+\frac{\tau^*}{2}\int\limits_0^1 \mu I(0,\mu,1)\,d\mu + \frac{\tau_0-\tau^*}{2}\int\limits_0^1 \mu I(\tau_0,-\mu,1)\,d\mu - \int\limits_0^{\tau_0}|\tau^*-\tau'|\times \tag{13}$$

$$\times f(\tau')\,d\tau'\Bigg] - \frac{1}{4}\int\limits_1^\infty b(y,1)\int\limits_0^1 \frac{\mu}{\mu y+1}\,[e^{-y\tau^*}I(0,\mu,1) + e^{-y(\tau_0-\tau^*)}\times$$

$$\times I(\tau_0,-\mu,1)\Big]\,d\mu dy + \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty b(y,1)\int\limits_0^{\tau_0} f(\tau')e^{-y|\tau^*-\tau'|}\,d\tau' dy.$$

Формулы (7), (11) — (13) являются решением поставленной в начале статьи задачи[1]. Соотношение (12) применимо и при $\tau_0=\infty$. Для этого достаточно потребовать, чтобы $f(\tau)$ при $\tau\to\infty$ мажорировалась функцией $e^{a\tau}$ $(a<k)$. В этом случае формула (12) принимает следующий вид:

$$S(\tau^*)\Big|_{\substack{\lambda<1\\ \tau_0=\infty}} = f(\tau^*) + \frac{k(1-k^2)}{\lambda+k^2-1}\Bigg[\int\limits_0^\infty f(\tau')\,e^{-k|\tau^*-\tau'|}\,d\tau' -$$

$$-\frac{\lambda}{2}e^{-k\tau^*}\int\limits_0^1 \frac{\mu I(0,\mu,\lambda)}{\mu k+1}d\mu\Bigg] + \frac{\lambda}{2}\int\limits_1^\infty b(y,\lambda)\int\limits_0^\infty f(\tau)\,e^{-y|\tau^*-\tau|}d\tau dy - \tag{14}$$

$$-\frac{\lambda^2}{4}\int\limits_1^\infty b(y,\lambda)e^{-y\tau^*}\int\limits_0^1 \frac{\mu I(0,\mu,\lambda)}{\mu y+1}\,d\mu dy.$$

Из (7), (11) нетрудно получить формулы для резольвентной функции $\Phi(\tau^*,\tau_0,\lambda)=\Gamma(\tau^*,0,\tau_0,\lambda)$ [6, 9] через функции Амбарцумяна $\varphi(\mu,\lambda,\tau_0)$, $\psi(\mu,\lambda,\tau_0)$ [10]. Искомые выражения имеют вид

$$\Phi(\tau^*,\tau_0,\lambda) = \Phi_\infty(\tau^*,\lambda) - \frac{\lambda}{2}\frac{k(1-k^2)}{k^2+\lambda-1}\int\limits_0^1 \Pi_\lambda(\mu,\tau^*,\tau_0,k)\,d\mu -$$

$$-\frac{\lambda^2}{4}\int\limits_1^\infty b(y,\lambda)\,dy\int\limits_0^1 \Pi_\lambda(\mu,\tau^*,\tau_0,y)\,d\mu, \tag{15}$$

$$\Phi(\tau^*,\tau_0,1) = \frac{3}{2}\Bigg[\frac{1}{2}\int\limits_0^1(\mu+\tau^*)\,\varphi(\mu,1,\tau_0)\,d\mu + \tag{16}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^1(\mu+(\tau_0-\tau^*))\,\psi(\mu,1,\tau_0)\,d\mu - \tau^*\Bigg] + \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty b(y,1)\,e^{-y\tau^*}dy -$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_1^\infty b(y,1)\,dy\int\limits_0^1 \Pi_1(\mu,\tau^*,\tau_0,y)\,d\mu,$$

---

[1] Формулу (12) можно получить и из физических соображений на основании результатов работы [8].

где

$$\Pi_\lambda(\mu,\ \tau^*,\ \tau_0,\ x)\Big|_{\substack{x=k\\x=y}} = \frac{1}{\mu x+1}\left(e^{-y\tau^*}\varphi(\mu,\ \lambda,\ \tau_0)+e^{-x(\tau_0-\tau^*)}\psi(\mu,\ \lambda,\ \tau_0)\right). \tag{17}$$

Определение $\Phi_\infty(\tau^*,\ \lambda)$ и ее физический смысл подробно рассмотрены в [6]. Соотношения (15), (16) при $\tau_0 \to \infty$ переходят в известные выражения, полученные ранее [11].

Одним из наиболее важных приложений формул (12) — (14) является возможность получения на их основе новых линейных интегральных уравнений для интенсивностей излучения, выходящего из слоя. Выпишем эти уравнения только для случая $\tau_0<\infty$ и $\lambda<1$. Принимая во внимание формулы [6, 9], выражающие интенсивности излучения, выходящего из слоя, через функцию источников, из (12) находим искомые уравнения

$$I(0,\zeta,\lambda)=\int_0^{\tau_0} K_1(\zeta,\tau)f(\tau)\,d\tau-\alpha c(\zeta,k,\tau_0)-\beta d(\zeta,\ k,\ \tau_0)-$$

$$-\int_0^1 L_1(\zeta,\mu,\tau_0)I(0,\mu,\lambda)\,d\mu-\int_0^1 L_2(\zeta,\mu,\tau_0)I(\tau_0,\ -\mu,\ \lambda)\,d\mu, \tag{18}$$

$$I(\tau_0,\ -\zeta,\ \lambda)=\int_0^{\tau_0} K_2(\zeta,\tau)f(\tau)\,d\tau-\alpha d(\zeta,k,\tau_0)-\beta c(\zeta,k,\tau_0)-$$

$$-\int_0^1 L_2(\zeta,\mu,\tau_0)I(0,\mu,\lambda)\,d\mu-\int_0^1 L_1(\zeta,\ \mu,\tau_0)I(\tau_0,\ -\mu,\lambda)\,d\mu,$$

где

$$K_1(\zeta,\tau)=\frac{1}{\zeta}\left(e^{-\frac{\tau}{\zeta}}+\int_0^{\tau_0}\Phi_\infty(|\tau-\tau'|,\lambda)\,e^{-\frac{\tau'}{\zeta}}\,d\tau'\right),$$

$$K_2(\zeta,\tau)=\frac{1}{\zeta}\left(e^{-\frac{(\tau_0-\tau)}{\zeta}}+\int_0^{\tau_0}\Phi_\infty(|\tau-\tau'|,\lambda)\,e^{-\frac{(\tau_0-\tau')}{\zeta}}\,d\tau'\right), \tag{19}$$

$$L_1(\zeta,\mu,\tau_0)=\frac{\lambda^2}{4}\,\mu\int_1^\infty\frac{b(y,\lambda)}{\mu y+1}\,c(\zeta,y,\tau_0)\,dy,$$

$$L_2(\zeta,\mu,\tau_0)=\frac{\lambda^2}{4}\,\mu\int_1^\infty\frac{b(y,\lambda)}{\mu y+1}\,d(\zeta,y,\tau_0)\,dy,$$

$$c(\zeta,x,\tau_0)\Big|_{\substack{x=k\\x=y}}=\frac{1-e^{-\left(x+\frac{1}{\zeta}\right)\tau_0}}{1+x\zeta},\quad d(\zeta,x,\tau_0)\Big|_{\substack{x=k\\x=y}}=$$

$$=\frac{1}{1-x\zeta}\left(e^{-x\tau_0}-e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}\right),$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{2} \frac{k(1-k^2)}{k^2+\lambda-1} \int_0^1 \frac{\mu I(0, \mu, \lambda)}{\mu k+1} d\mu, \quad \beta =$$

$$= \frac{\lambda}{2} \frac{k(1-k^2)}{k^2+\lambda-1} \int_0^1 \frac{\mu I(\tau_0, -\mu, \lambda)}{\mu k+1} d\mu; \ \zeta > 0.$$

Систему (18) можно решать итерационным методом, причем если в качестве нулевого приближения для $I(0, \zeta, \lambda)$ и $I(\tau_0, -\zeta, \lambda)$ брать первые три слагаемых соответственно в каждом из уравнений (18), то при любых значениях оптической толщины слоя и вероятности выживания кванта для получения достаточно точного решения надо практически вычислить только несколько первых итераций. Параметры α и β, которые при этих вычислениях должны считаться известными, можно затем найти с помощью интегральных соотношений [2] или с использованием формул (12), (19). Для случая консервативного рассеяния соответствующую систему уравнений для $I(0, \zeta, 1)$, $I(\tau_0, -\zeta, 1)$ можно получить из формулы (13). Она отличается от (18) только членами, которые не содержат $L_1(\zeta, \mu, \tau_0)$ и $L_2(\zeta, \mu, \tau_0)$, и с точки зрения сходимости итерационного процесса так же удобна, как и уравнения (18).

Эффективность итерационного метода решения указанных систем уравнений легко доказать на основе следующих неравенств:

$$|\bar{L}^m(z)| < Mq^m, \ |z(\zeta)| < M = \text{const} < \infty,$$
$$q = \text{const}, \ q^2 \ll 1; \ m = 1, 2, 3, 4, \ldots, \tag{20}$$

где $\bar{L}^m$ — m-я степень интегрального оператора $\bar{L}_1$ или $\bar{L}_2$, а $z(\zeta)$ — функция от ζ. Операторы $\bar{L}_1$, $\bar{L}_2$ определяются соотношениями

$$\bar{L}_1(z) = \int_0^1 L_1(\zeta, \mu, \tau_0) z(\mu) d\mu, \quad \bar{L}_2(z) = \int_0^1 L_2(\zeta, \mu, \tau_0) z(\mu) d\mu.$$

Очевидно, что система уравнений (18) может использоваться также для отыскания первичной функции источников $f(\tau)$. Однако в отличие от рассмотренных выше вопросов эта задача является некорректной, поскольку, как видно из (18), она сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода.

В заключение авторы выражают свою признательность В. В. Иванову за обсуждение результатов и полезные замечания.

Литература

1. E. W. Larsen. J. Q. S. R. T., **15**, 1, 1975.
2. Н. Н. Роговцов. ЖПС, **21**, 517, 1974.
3. Н. Н. Роговцов. ЖПС, **22**, 1086, 1975.
4. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
5. Е. С. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
6. В. В. Иванов. Перенос излучения и спектры небесных тел. М., Физматгиз, 1969.
7. К. Кейз, П. Цвайфель. Линейная теория переноса. М., «Мир», 1972.
8. В. В. Иванов. Астрон. журн., **41**, 44, 1964.
9. В. В. Соболев. Рассеяние света в атмосферах планет. М., «Наука», 1972.
10. В. А. Амбарцумян. Научные труды, т. 1. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1960.
11. И. Н. Минин. ДАН СССР, **120**, 63, 1958.

Поступило в редакцию 23 сентября 1975 г.